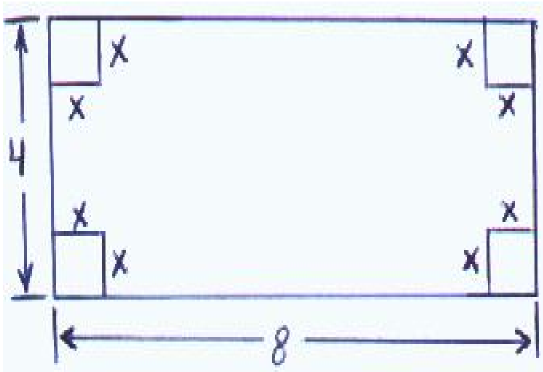
EJERCICIO 2 DE SELECTIVIDAD Jun'98 A

Un rectángulo mide 8 dm de largo y 4 dm de ancho. De cada esquina se recorta un cuadrado de lado x, con el fin de hacer una caja sin tapa.
a) (1 punto) Calcule el volumen de la caja en función de x.
b) (1 punto) Halle x para que el volumen sea máximo.
c) (1 punto) Halle dicho volumen máximo.

Al recortar las cuatro esquinas sobre el rectángulo de 8 x 4 y doblar hacia arriba para construir la caja, resulta:



largo = 8 - 2x; ancho = 4 - 2x; alto = x.

a) El volumen de la caja es:

$$V(x) = largo \cdot ancho \cdot alto = (8-2x)\cdot(4-2x)\cdot x = 4x^3 - 24x^2 + 32x$$

b) El máximo volumen se alcanza para un valor de x que anule la derivada primera:

$$V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 48x + 32 \text{ (para calcular el posible máximo)}$$

$$V''(x) = 24x - 48 \text{ (para ratificar el máximo)}$$

$$V'(x) = 12x^2 - 48x + 32 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3{,}15 \\ x_2 = 0{,}85 \end{cases}$$

$$x_1 = 3{,}15 \Rightarrow ancho = 4 - 2x = -2{,}3\ absurdo \text{ (Este valor queda descartado)}$$

$$x_2 = 0{,}85 \Rightarrow ancho = 4 - 2x = 2{,}3;\ largo = 8 - 2x = 6{,}3 \text{ (¡Puede que aquí se alcance el máximo!)}$$

$$V''(x) = 24x - 48 \Rightarrow V''(0{,}85) = 24(0{,}85) - 48 = -27{,}6 < 0 \Rightarrow \exists\ máx\ en\ x = 0{,}85$$

c) El máximo volumen es:

$$V_{máx} = largo \cdot ancho \cdot alto = 6{,}3 \cdot 2{,}3 \cdot 0{,}85 = 12{,}32\ dm^3.$$